UNIVERSIDAD DE SANTANDER
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS
DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS
CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS

TEORIA ELEMENTAL DE VIGAS ALABEADAS. APLICACION A LA VIGA - BALCON CIRCULAR

PUBLICACION . AE - 80.3

AVELINO SAMARTIN QUIROGA
J.R. GONZALEZ DE CANGAS

1980

PRESENTACION

Este trabajo corresponde a una aplicación de los métodos matemáticos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias al cálculo elemental de vigas alabeadas. Representa un estudio que ha comenzado hace varios años el primer autor y que ahora en colaboración con el Profesor González de Cangas encuentra su término final en esta publicación de la Cátedra de Análisis de las Estructuras de la E. T. S. de Ingenieros de Caminos de Santander. El objetivo de estas notas es fundamentalmente ilustrativo, por lo que únicamente se ha considerado una teoría elemental lineal y elástica de las vigas alabeadas en donde se extiende la validez de la hipótesis de Navier, así como la no consideración de las deformaciones de cortante y alabeo.

Se aplica esta teoría general a un caso simple, la viga balcón circular, en donde se presentan las expresiones de la matriz de rigidez y de las reacciones de empotramiento rígido, bajo dos tipos de carga: puntual arbitraria y uniformemente repartida en toda la luz. La extensión a otros tipos estructurales (viga helicoidal, vigas distorsionadas, etc.) es directa.

Esperamos que este trabajo represente una ayuda en el planteamiento y resolución de éstos y otros casos estructurales simples.

Avelino Samartín

TEOREMA ELEMENTAL DE VIGAS ALABEADAS. APLICACION A LA VIGA BALCON CIRCULAR.

1. TEORIA GENERAL DE VIGAS ALABEADAS

1.1 Notación. Convenio de signos

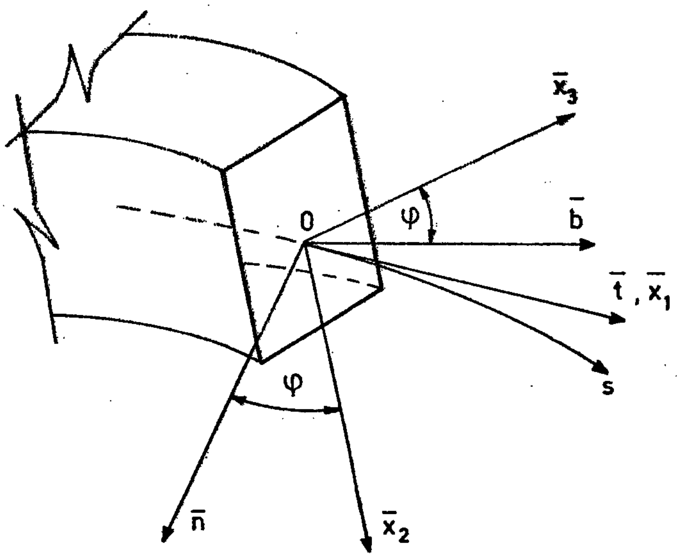
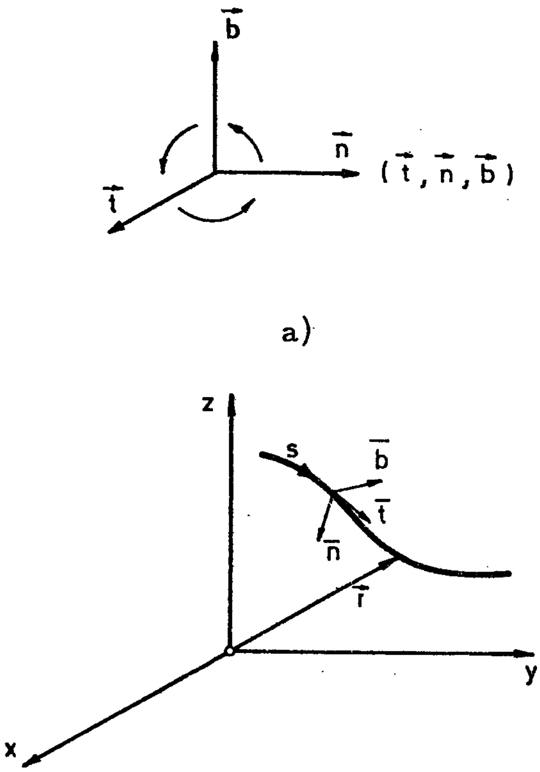


FIG. 1



a)

b)

FIG. 2

Sea $\bar{r}$ el vector posición de la directriz de una pieza (FIG. 2-b).$(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ es el triedro intrínseco (FIG. 2).

Se designa por prima (') la derivación respecto del parámetro intrínseco s

La orientación del triedro está dada por:

$\bar{t} \times \bar{n} = \bar{b}$; $\bar{t} \times \bar{b} = -\bar{n}$; $\bar{n} \times \bar{b} = \bar{t}$

Las fórmulas de Frenet :

$$\bar{t}' = k\,\bar{t}$$
$$\bar{n}' = -k\,\bar{t} + \tau\bar{b}$$
$$\bar{b}' = -\tau\bar{n}$$

pueden ser expresadas matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \bar{t}' \\ \bar{n}' \\ \bar{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & k & o \\ -k & o & \tau \\ o & -\tau & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix}$$

Se introduce otro triedro intrínseco ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$) (FIG. 1), de tal modo que $\bar{x}_1$ coincida con $\bar{t}$ y $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$ tengan la dirección de los ejes principales de inercia de la sección transversal. Dicho triedro queda definido como sigue (FIG. 3).

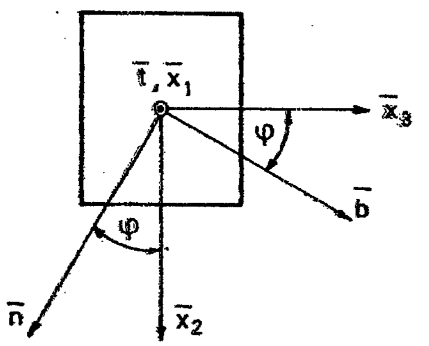


FIG. 3

$$\bar{x}_1 = \bar{t}$$
$$\bar{x}_2 = \bar{n}\cos\varphi + \bar{b}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$\bar{x}_3 = -\bar{n}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \bar{b}\cos\varphi$$

O bien, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi \\ 0 & -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\mathrm{sen}\varphi \\ 0 & \mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

Los recorridos del punto O (FIG. 1), una vez despreciada la deformación por cortante, se definen por un vector desplazamiento $\bar{u}$ y un giro α alrededor de $\bar{x}_1$, con sentido positivo dextrogiro al avanzar con x_1

$$\bar{u} = u_1\bar{x}_1 + u_2\bar{x}_2 + u_3\bar{x}_3 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi \\ 0 & -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix}$$

En lo que sigue, las letras mayúsculas se referirán a magnitudes correspondientes a la directriz deformada y las minúsculas a la directriz sin deformar.

1.2 Relaciones entre desplazamientos y deformaciones

1.2.1 Igualdades previas

Teniendo en cuenta que $\bar{r} = \bar{r}(s)$, es conveniente, para el cálculo posterior, considerar las igualdades siguientes:

$$\bar{r}' = \bar{t}$$
$$\bar{r}'' = k\bar{n}$$
$$\bar{r}''' = k'\bar{n} + k\bar{n}' = -k^2\bar{t} + k'\bar{n} + k\tau\bar{b}$$
$$\bar{r}'\bar{r}' = 1$$
$$\bar{r}'\bar{r}'' = 0$$
$$\bar{r}'\bar{r}''' = -k^2$$
$$\bar{r}''\bar{r}'' = k^2$$
$$\bar{r}''\bar{r}''' = k\,k'$$
$$\bar{r}' \times \bar{r}'' = \bar{t} \times k\bar{n} = k\bar{b}$$
$$\bar{r}' \times \bar{r}''' = \bar{t} \times (-k^2\bar{t} + k'\bar{n} + k\tau\bar{b}) = -k\tau\bar{b} + k'\bar{b}$$
$$\bar{r}'' \times \bar{r}''' = k\bar{n} \times (-k^2\bar{t} + k'\bar{n} + k\tau\bar{b}) = k^2\,\tau\bar{t} + k^3\bar{b}$$

$$\left[\bar{r}'\,\bar{r}''\,\bar{r}'''\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & k' & k\tau \end{vmatrix} = k^2\,\tau$$

Proyecciones de la directriz sobre el triedro intrínseco (FIG. 4):

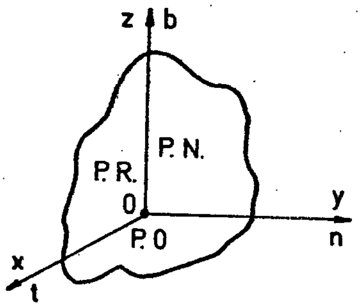


FIG. 4

$$\bar{X} = \bar{X}(s) \qquad \begin{aligned} \bar{X}' &= \bar{t} \\ \bar{X}'' &= k\bar{n} \\ \bar{X}''' &= -k^2\bar{t} + k'\bar{n} + k\tau\bar{b} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} x' = 1 & y' = 0 & z' = 0 \\ x'' = 0 & y'' = k & z'' = 0 \\ x''' = -k^2 & y''' = k' & z''' = k\tau \end{array}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{y}{x^2} = \lim_{s\to 0} \frac{y'}{2xx'} = \lim_{s\to 0} \frac{y''}{2xx''+2x'^2} = \frac{k}{2}$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{z}{x^3} = \lim_{s\to 0} \frac{z'}{3x^2x'} = \lim_{s\to 0} \frac{z''}{6xx'^2+\cancel{3x^2x''}} = \lim_{s\to 0} \frac{z'''}{6x'^3+12xx'x''} = \frac{k\tau}{6}$$

Las proyecciones de la directriz en un entorno de 0, son:

- Sobre el plano osculador, ton :

$$n = \frac{1}{2}\,k\,t^2$$

- Sobre el plano rectificante tob:

$$b = \frac{1}{6}k\tau t^3$$

Las curvaturas de las proyecciones de la directriz sobre los planos $x_1 O x_2$ y $x_1 O x_2$ se obtienen como sigue (FIG. 3)

Teniendo en cuenta que $\bar{k} = k\bar{n}$, se deduce:

- Proyectando sobre $x_1 O x_2$: $|\bar{k}_2| = |\bar{k}| \cos\varphi$; o sea : $k_2 = k\cos\varphi$
- Proyectando sobre $x_1 O x_3$: $|\bar{k}_3| = -|\bar{k}|\,\mathrm{sen}\varphi$; es decir: $k_3 = -k\,\mathrm{sen}\varphi$

Las derivadas de los versores $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ y $\bar{x}_3$, respecto del parámetro intrínseco s se calculan como se indica a continuación:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi \\ 0 & -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{x}'_1\\ \bar{x}'_2\\ \bar{x}'_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\varphi'\operatorname{sen}\varphi & \varphi'\cos\varphi\\ 0 & -\varphi'\cos\varphi & -\varphi'\operatorname{sen}\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{t}\\ \bar{n}\\ \bar{b}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi\\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{t}'\\ \bar{n}'\\ \bar{b}'\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\varphi'\operatorname{sen}\varphi & \varphi'\cos\varphi\\ 0 & -\varphi'\cos\varphi & -\varphi'\operatorname{sen}\varphi\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi\\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & o\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{t}\\ \bar{n}\\ \bar{b}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varphi'\\ 0 & -\varphi' & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & k & 0\\ -k\cos\varphi & -\tau\operatorname{sen}\varphi & \tau\cos\varphi\\ k\operatorname{sen}\varphi & -\tau\cos\varphi & -\tau\operatorname{sen}\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi\\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{x}'_1\\ \bar{x}'_2\\ \bar{x}'_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k_2 & k_3\\ -k_2 & 0 & \tau+\varphi'\\ -k_3 & -(\tau+\varphi') & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}$$

Si $\bar{R} = \bar{r} + \bar{u}$ es el vector posición de la directriz deformada, se cumplen las siguientes igualdades (FIG. 5):

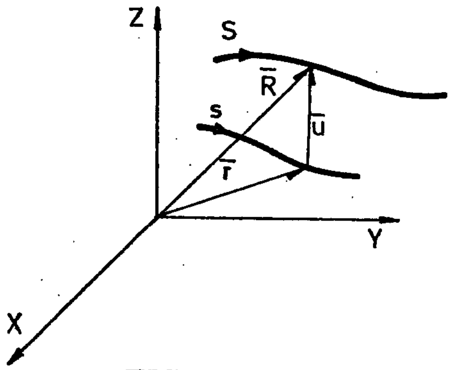


FIG. 5

$$\bar{R}' = \bar{r}' + \bar{u}' = \bar{t} + \bar{u}'$$

$$\bar{R}'' = \bar{t}' + \bar{u}'' = k\bar{n} + \bar{u}''$$

$$\bar{R}''' = k'\bar{n} + k\bar{n}' + \bar{u}''' = -k^2\bar{t} + k'\bar{n} + k\tau\bar{b} + \bar{u}'''$$

<u>Hipótesis 1º</u>

Se trata de una hipótesis cinemática.

Se supone que las relaciones "desplazamientos-deformaciones" son lineales. Para ello es necesario que se cumpla:

$$|\bar{k}_1| \cdot |\bar{k}_2| << h \cdot |\bar{k}_3|$$

siendo $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ y $\bar{k}_3$ magnitudes cinemáticas cualesquiera y h una constante finita arbitraria.

De las consideraciones anteriores se deriva:

$$\bar{R}'.\bar{R}' = (\bar{t} + \bar{u}') . (\bar{t} + \bar{u}') = 1 + 2\,\bar{t}\bar{u}' \qquad \boxed{\bar{R}'.\bar{R}' = 1 + 2\bar{t}\bar{u}'}$$

Como $\bar{u}' \times \bar{u}'' = u'u''\,\mathrm{sen}(u', u'') = 0$, se tiene

$$\bar{R}'\times\bar{R}'' = (\bar{t}+\bar{u}')\times(k\bar{n}+\bar{u}'') = \bar{t}\times k\bar{n} + \bar{t}\times\bar{u}'' + k(\bar{u}'\times\bar{n}) + \bar{u}'\times\bar{u}'' =$$

$$= k\bar{b} + (\bar{t}\times\bar{u}'') + k(\bar{u}'\times\bar{n}) \qquad \boxed{\bar{R}'\times\bar{R}'' = k\bar{b} + (\bar{t}\times\bar{u}'') + k(\bar{u}'\times\bar{n})}$$

$$(\bar{R}'\times\bar{R}'').(\bar{R}'\times\bar{R}'') = k^2 + (\bar{t}\times\bar{u}'')^2 + k^2(\bar{u}'\times\bar{n})^2 + 2k\bar{b}(\bar{t}\times\bar{u}'') + 2k^2\bar{b}(\bar{u}'\times\bar{n}) + 2k(\bar{t}\times\bar{u}'')(\bar{u}'\times\bar{n})$$

Teniendo en cuenta que:

$$(\bar{a}\times\bar{b}).(\bar{c}\times\bar{d}) = (\bar{a}.\bar{c}).(\bar{b}.\bar{d}) - (\bar{a}.\bar{d}).(\bar{b}.\bar{c})$$

y $(\bar{a}\times\bar{b})^2 = a^2b^2 - (\bar{a}.\bar{b})^2$, resulta :

$$(\bar{R}'\times\bar{R}'').(\bar{R}'\times\bar{R}'') = k^2 + u''^2 + k^2u'^2 + 2k(\bar{n}\bar{u}'') + 2k^2(\bar{t}\bar{u}') + 2k(\bar{t}\bar{u}')(\bar{n}\bar{u}'') - 2k\cancel{(\bar{t}.\bar{n})}(\bar{u}'.\bar{u}'')$$

Como $2k(\bar{n}\bar{u}'') = 2ku''\cos(\bar{n},\bar{u}'')$ y

$2k(\bar{t}\bar{u}')(\bar{n}\bar{u}'') = 2ku'u''\cos(\bar{t},\bar{u}')\cos(\bar{n},\bar{u}'')$, resulta que esta segunda expresión es despreciable frenta a la anterior, por lo cual:

$$(\bar{R}'\times\bar{R}'').(\bar{R}'\times\bar{R}'') = k^2(1+\cancel{u'^2}) + \cancel{u''^2} + 2k(\bar{n}.\bar{u}'') + 2k^2(\bar{t}.\bar{u}') ;$$

$$\boxed{(\bar{R}'\times\bar{R}'').(\bar{R}'\times\bar{R}'') = k^2 + 2k(\bar{n}.\bar{u}'') + 2k^2(\bar{t}.\bar{u}')}$$

$$(\bar{R}'\times\bar{R}'').\bar{R}''' = \left[k\bar{b} + (\bar{t}\times\bar{u}'') + (\bar{u}'\times k\bar{n})\right].\left[-k^2\bar{t} + k'\bar{n} + k\tau\bar{b} + \bar{u}'''\right] =$$

$$= k^2\tau + k(\bar{b}.\bar{u}''') + (\bar{t}\times\bar{u}'').k'\bar{n} + (\bar{t}\times\bar{u}'').k\tau\bar{b} + \cancel{(\bar{t}\times\bar{u}'')}.\bar{u}''' + (\bar{u}'\times k\bar{n}).(-k^2\bar{t}) + (\bar{u}'\times k\bar{n}).k\tau\bar{b} +$$

$$+ (\bar{u}'\times k\bar{n}).\bar{u}''' = k^2\tau + k(\bar{b}.\bar{u}''') - k'\bar{u}''(\bar{t}\times\bar{n}) - k\tau\bar{u}''.(\bar{t}\times\bar{b}) - k^3\bar{u}'(\bar{n}\times\bar{t}) + k^2\tau\bar{u}'.(\bar{n}\times\bar{b}) ;$$

$$\boxed{(\bar{R}'\times\bar{R}'').\bar{R}''' = k^2\tau + k(\bar{b}.\bar{u}''') - k'(\bar{b}.\bar{u}'') + k\tau(\bar{n}.\bar{u}'') + k^3(\bar{b}.\bar{u}') + k^2\tau(\bar{t}.\bar{u}')}$$

1.2.2 Curvaturas en la directriz deformada

Las expresiones de $\bar{R}'$, $\bar{R}''$ y $\bar{R}'''$ anteriores han sido obtenidas por derivación respecto al parámetro s que no es el intrínseco de la directriz deformada. La curvatura de ésta viene dada por:

$$K^2 = \frac{(\bar{R}'\times\bar{R}'').(\bar{R}'\times\bar{R}'')}{(\bar{R}'.\bar{R}')^3} = \frac{k^2 + 2k(\bar{n}.\bar{u}'') + 2k^2(\bar{t}.\bar{u}')}{(1+2\bar{t}.\bar{u}')^3} = \frac{k^2 + 2k(\bar{n}.\bar{u}'') + 2k^2(\bar{t}.\bar{u}')}{1+6(\bar{t}.\bar{u}')}$$

y efectuando el cociente anterior, queda: $K^2 = k^2 + 2k(\bar{n}.\bar{u}'') - 4k^2(\bar{t}.\bar{u}')$, es decir:

$K^2 = k^2\left[1 + \frac{2}{k}(\bar{n}.\bar{u}'') - 4(\bar{t}.\bar{u}')\right] = k^2\left[1 - 2(\bar{t}.\bar{u}') + \frac{\bar{n}.\bar{u}''}{k}\right]^2$, habida cuenta de la hipótesis 1ª. Por tanto:

$$\boxed{K = k\left[1 - 2(\bar{t}.\bar{u}') + \frac{\bar{n}.\bar{u}''}{k}\right]}$$

Se considera inicialmente, como único giro de la sección, uno de valor α alrededor de la directriz deformada $(\overline{X}_1)$. (FIG. 6)

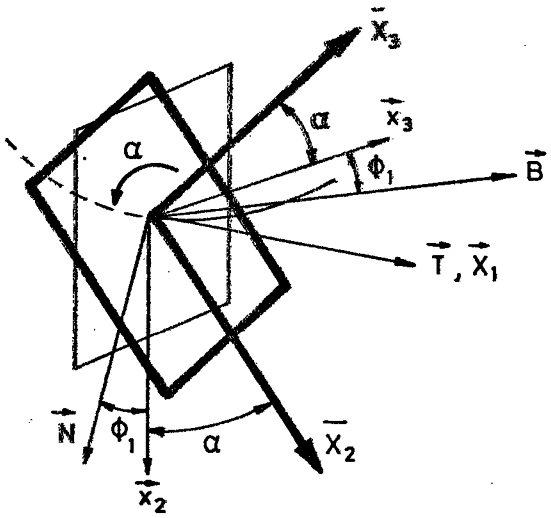


FIG. 6

El ángulo ϕ_1 es el que forman $\overline{N}$ y $\overline{x}_2$ una vez producido el desplazamiento $\overline{u}$; se estudia por tanto en $\overline{R}$, esto es, directriz deformada.

Se define: $\phi = \phi_1 + \alpha$

y se llega, de modo análogo a lo visto en el apartado 1. 2. 1 a:

$$K_2 = K \cos \phi$$

$$K_3 = -K \operatorname{sen} \phi$$

Si se trabaja con el parámetro intrínseco de la directriz deformada, se deduce:

$$\overline{R} = \overline{R}\ (S) \ , \text{ y además : } \ \overline{R} = \overline{r} + \overline{u}' \ ,$$

por tanto:

$$\overline{R}'(S) = \frac{d\,\overline{R}}{d\,S} = \frac{d\,\overline{R}}{d\,s} \cdot \frac{d\,s}{d\,S} = \overline{R}' \cdot \frac{d\,s}{d\,S} = \overline{T}$$

$$\overline{R}''(S) = \overline{R}'' \left(\frac{d\,s}{d\,S}\right)^2 - \overline{R}' \cdot \frac{d^2 s}{d\,S^2} = K.\overline{N}$$

Por lo tanto:

$$\overline{N} = \frac{1}{K}\left[\overline{R}''\left(\frac{d\,s}{d\,S}\right)^2 + \overline{R}'\,\frac{d^2 s}{dS^2}\right]$$

con lo cual, resulta:

$$\cos \phi_1 = \overline{N}.\overline{x}_2 = \frac{1}{K}\left[\overline{R}''\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 + \overline{R}'\,\frac{d^2 s}{d\,S^2}\right] \cdot \overline{x}_2$$

Además, por ser $\left|\overline{T}\right| = 1$ y tener $\overline{T}$ y $\overline{R}'$ el mismo sentido, se puede poner:

$$\frac{ds}{dS} = \frac{\overline{T}}{\overline{R}'} = \frac{1}{R'} \quad ; \text{ y, de ahí: } \left(\frac{ds}{dS}\right)^2 = \frac{1}{R'} \cdot \frac{1}{R'} = \frac{1}{\overline{R}'} \cdot \frac{1}{\overline{R}'} = \frac{1}{1+2\overline{t}.\overline{u}'} =$$

$$= 1 - 2\overline{t}\overline{u}' = (1 - \overline{t}\overline{u}')^2$$

es decir: $\dfrac{ds}{dS} = 1 - \bar{t}.\bar{u}'$

$$\frac{d^2s}{dS^2} = \frac{d(1-\bar{t}.\bar{u}')}{ds} \cdot \frac{ds}{dS} = -\left[\bar{t}.\bar{u}'+\bar{t}.\bar{u}''\right]\left[1-\bar{t}.\bar{u}'\right] = -\left[k\bar{n}\bar{u}' + \bar{t}\bar{u}''\right]\left[1-\bar{t}.\bar{u}'\right] = -k\bar{n}\bar{u}'-\bar{t}.\bar{u}''$$

habida cuenta de estos resultados, se tiene:

$$\cos\phi_1 = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1-2\bar{t}\bar{u}'+\frac{\bar{n}\bar{u}''}{k})}\left[(k\bar{n}+\bar{u}'')(1-2\bar{t}.\bar{u}')+(\bar{t}+\bar{u}')(-k\bar{n}\bar{u}'-\bar{t}\bar{u}'')\right]\bar{x}_2 =$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(1-2\bar{t}\bar{u}'+\frac{\bar{n}\bar{u}''}{k})}\left[k\bar{n}-2k\bar{n}(\bar{t}.\bar{u}')+\bar{u}''-k\bar{t}(\bar{n}.\bar{u}')-\bar{t}.(\bar{t}.\bar{u}'')\right]\bar{x}_2 =$$

$$= \frac{k\bar{n}+\bar{u}''-\bar{n}.(\bar{n}.\bar{u}'')}{k}\,\bar{x}_2 - \bar{t}.\left[\bar{t}.\bar{u}''+\cancel{k\bar{n}\bar{u}'}\right]\left[\bar{n}\cos\varphi + \bar{b}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right] =$$

$$= \bar{n}(1-\frac{\bar{n}.\bar{u}''}{k})\,\bar{x}_2 + \frac{\bar{u}''.\bar{x}_2}{k} = \cos\varphi\,(1-\frac{\bar{n}.\bar{u}''}{k}) + \frac{\bar{u}''}{k}(\bar{n}\cos\varphi + \bar{b}\,\mathrm{sen}\,\varphi) =$$

$$= \cos\varphi - \frac{\bar{n}\,\bar{u}''}{k}\cos\varphi + \frac{\bar{u}''.\bar{n}}{k}\cos\varphi + \frac{\bar{u}''.\bar{b}}{k}\,\mathrm{sen}\,\varphi\ ; \quad \boxed{\cos\phi_1 = \cos\varphi + \frac{\bar{b}\bar{u}''}{k}\,\mathrm{sen}\,\varphi}$$

$$\cos^2\phi_1 = \cos^2\varphi + \frac{2\bar{b}.\bar{u}''}{k}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi \ ; \ \mathrm{sen}^2\phi_1 = 1-\cos^2\phi_1 =$$

$$= \mathrm{sen}^2\varphi - \frac{2\bar{b}.\bar{u}''}{k}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi = (\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{\bar{b}.\bar{u}''}{k}\cos\varphi)^2 \ ;$$

$$\boxed{\mathrm{sen}\,\phi_1 = \mathrm{sen}\,\varphi - \frac{\bar{b}.\bar{u}''}{k}\cos\varphi}$$

Resulta, pues:

$K_2 = K\cos\phi = K\cos(\phi_1+\alpha) = K\left[\cos\phi_1\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\phi_1\,\mathrm{sen}\,\alpha\right]$; ahora bien, el giro α es muy pequeño, por lo que se puede suponer : $\cos\alpha \simeq 1$. y $\mathrm{sen}\,\alpha \simeq \alpha$; en este caso, se tiene:

$$K_2 = k(1-2\overline{t}\overline{u}' + \frac{\overline{n}\overline{u}''}{k})\left[(\cos\varphi + \frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\operatorname{sen}\varphi) - (\operatorname{sen}\varphi - \frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\cos\varphi)\alpha\right] =$$

$$= k(1-2\overline{t}\overline{u}' + \frac{\overline{n}\overline{u}''}{k})\left[\cos\varphi + \frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\operatorname{sen}\varphi - \alpha\operatorname{sen}\varphi + \alpha\frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\cos\varphi\right] \;;$$

además $\alpha\cdot\frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\cos\varphi$ es despreciable frente a $\cos\varphi$; por tanto:

$$K_2 = k(1-2\overline{t}\overline{u}' + \frac{\overline{n}\overline{u}''}{k})\left[\cos\varphi + \frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\operatorname{sen}\varphi - \alpha\operatorname{sen}\varphi\right] = k\cos\varphi(1-2\overline{t}\overline{u}' + \frac{\overline{n}\overline{u}''}{k}) +$$

$$+ \overline{b}\overline{u}''\operatorname{sen}\varphi + \alpha k_3$$

al haber tenido en cuenta que $2\operatorname{sen}\varphi.\alpha(\overline{t}.\overline{u}')$ y $-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{k}\alpha(\overline{n}\overline{u}'')$ son infinitésimos de orden superior. Resulta pues :

$K_2 = k\cos\varphi(1-2\overline{t}\overline{u}') + \cos\varphi\,\overline{n}.\overline{u}'' + \operatorname{sen}\varphi\,\overline{b}\overline{u}'' + \alpha\, k_3$; es decir :

$$\boxed{K_2 = k_2(1-2\overline{t}\overline{u}') + \alpha k_3 + \overline{x}_2\,\overline{u}''}$$

Análogamente:

$$K_3 = -K\operatorname{sen}\phi = -K\operatorname{sen}(\phi_1 + \alpha) = -K\left[\operatorname{sen}\phi_1\cos\alpha + \cos\phi_1\operatorname{sen}\alpha\right] =$$

$$= -K\left[(\operatorname{sen}\varphi - \frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\cos\varphi) + (\cos\varphi + \frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\operatorname{sen}\varphi)\alpha\right] = -K\left[\alpha\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\cos\varphi\right] = -k(1-2\overline{t}\overline{u}' + \frac{\overline{n}\overline{u}''}{k})(\alpha\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi - \frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\cos\varphi) = k_3(1-2\overline{t}\overline{u}' +$$

$$+ \frac{\overline{n}\overline{u}''}{k}) - \alpha k_2(1-\cancel{2\overline{t}\overline{u}'} + \cancel{\frac{\overline{n}\overline{u}''}{k}}) + \overline{b}\overline{u}''\cos\varphi\left[1-\cancel{2\overline{t}\overline{u}'} + \cancel{\frac{\overline{n}\overline{u}''}{k}}\right] = k_3(1-2\overline{t}\overline{u}') -$$

$$- \overline{n}\overline{u}''\operatorname{sen}\varphi + \overline{b}\overline{u}''\cos\varphi - \alpha k_2 \;;$$ es decir:

$$\boxed{K_3 = k_3(1-2\,\overline{t}\overline{u}') - \alpha k_2 + \overline{x}_3\,.\overline{u}''}$$

1.2.3 <u>Torsión (de la directriz deformada)</u>

$$\mathcal{T} = \frac{(\overline{R}'\,\overline{R}''\,\overline{R}''')}{(\overline{R}'x\overline{R}'').(\overline{R}'x\overline{R}'')} = \frac{k^2\tau + k(\overline{b}\overline{u}''') - k'(\overline{b}\overline{u}'') + k\tau(\overline{n}\overline{u}'') + k^3(\overline{b}\overline{u}') + k^2\tau(\overline{t}\overline{u}')}{k^2 + 2k^2(\overline{t}\overline{u}') + 2k(\overline{n}\overline{u}'')}$$

$$\mathcal{T} = \frac{\tau + \frac{\overline{b}\overline{u}'''}{k} - \frac{k'}{k^2}\overline{b}\overline{u}'' + \frac{\tau}{k}\overline{n}\overline{u}'' + k\overline{b}\overline{u}' + \tau\overline{t}\overline{u}'}{1 + 2\overline{t}\overline{u}' + \frac{2}{k}\overline{n}\overline{u}''} = \tau(1-\overline{t}\overline{u}') + \frac{\overline{b}\overline{u}'''}{k} - \frac{k'}{k^2}\overline{b}\overline{u}'' - \frac{\tau}{k}\overline{n}\overline{u}'' - k\overline{b}\overline{u}'$$

Además : $\frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\right) = \frac{k(\overline{b}'\overline{u}''+\overline{b}\overline{u}''')-k'\overline{b}\overline{u}''}{k^2} = \frac{\overline{b}\overline{u}'''}{k} - \frac{k'}{k^2}\overline{b}\overline{u}'' + \frac{\overline{b}'\overline{u}''}{k}$

y por otra parte : $\overline{b}' = -\tau\overline{n}$; por lo tanto :

$\frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\right) = \frac{\overline{b}\overline{u}'''}{k} - \frac{k'}{k^2}\overline{b}\,\overline{u}'' - \frac{\tau}{k}\overline{n}\,\overline{u}'' + k\overline{b}\overline{u}'$; resultando pues:

$$\mathcal{T} = \tau(1-\overline{t}\overline{u}') + \frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\right) + k\overline{b}\overline{u}'$$

La expresión anterior de la torsión considera únicamente la nueva posición de la directriz, pero no tiene en cuenta el giro de valor α . Como la torsión mide la variación proporcional del plano osculador (binormal) al desplazarse sobre la curva, se tiene:

$$\boxed{\mathcal{T} = \tau(1-\overline{t}\overline{u}') + \alpha' + \frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\right) + k\overline{b}\overline{u}'}$$

1.2.4 Otras expresiones de las curvaturas de flexión y torsión

Las anteriores expresiones se pueden reunir :

$$K_2 = k_2(1-2\overline{t}\overline{u}') + \alpha k_3 + \overline{x}_2\overline{u}''$$

$$K_3 = k_3(1-2\overline{t}\overline{u}') - \alpha k_2 + \overline{x}_3\overline{u}''$$

$$\mathcal{T} = \tau(1-\overline{t}\overline{u}') + \alpha' + \frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{b}\overline{u}''}{k}\right) + k\overline{b}\overline{u}'$$

Pero: $\overline{x}_2\overline{u}'' = \frac{d}{ds}(\overline{x}_2.\overline{u}') - \overline{x}'_2\overline{u}'$; $\overline{x}_3\overline{u}'' = \frac{d}{ds}(\overline{x}_3.\overline{u}') - \overline{x}'_3\overline{u}'$

Luego:

$K_2 = k_2(1-2\overline{t}\overline{u}') + \alpha k_3 + \frac{d}{ds}(\overline{x}_2\overline{u}') - \overline{x}'_2\overline{u}'$; $K_3 = k_3(1-2\overline{t}\overline{u}') - \alpha k_2 + \frac{d}{ds}(\overline{x}_3\overline{u}') - \overline{x}'_3\overline{u}'$

Además: $\bar{u} = u_1\bar{x}_1 + u_2\bar{x}_2 + u_3\bar{x}_3$ y

$$\bar{u}' = u'_1\bar{x}_1 + u'_2\bar{x}_2 + u'_3\bar{x}_3 + u_1\bar{x}'_1 + u_2\bar{x}'_2 + u_3\bar{x}'_3 = L_1\bar{x}_1 + L_2\bar{x}_2 + L_3\bar{x}_3$$

Ahora bien :

$$\bar{u}' = (u'_1 u'_2 u'_3)\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}u_1\, u_2\, u_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}'_1\\ \bar{x}'_2\\ \bar{x}'_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u'_1 u'_2 u'_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}u_1 u_2 u_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & k_2 & k_3\\ -k_2 & 0 & \tau+\varphi'\\ -k_3 & -(\tau+\varphi') & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}u'_1 u'_2 u'_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}u_1 u_2 u_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_2\bar{x}_2 + k_3\bar{x}_3\\ -k_2\bar{x}_1 + (\tau+\varphi')\bar{x}_3\\ -k_3\bar{x}_1 - (\tau+\varphi')\bar{x}_2\end{bmatrix} =$$

$$= \left[u'_1 - k_2u_2 - k_3u_3\right]\bar{x}_1 + \left[u'_2 + k_2u_1 - (\tau+\varphi')u_3\right]\bar{x}_2 + \left[u'_3 + k_3u_1 + (\tau+\varphi')u_2\right]\bar{x}_3$$

Por lo tanto :

$$L_1 = u'_1 - k_2u_2 - k_3u_3$$

$$L_2 = u'_2 + k_2u_1 - (\tau+\varphi')u_3$$

$$L_3 = u'_3 + k_3u_1 + (\tau+\varphi')u_2$$

Entonces resulta:

$$\bar{x}_2\bar{u}'' = \frac{d}{ds}(\bar{x}_2 \cdot \bar{u}') - \bar{x}'_2\bar{u}' = \frac{d}{ds}\left[\bar{x}_2 \cdot (L_1\bar{x}_1 + L_2\bar{x}_2 + L_3\bar{x}_3)\right] - \left[-k_2\bar{x}_1 + (\tau+\varphi')\bar{x}_3\right] \cdot$$

$$\cdot\left[L_1\bar{x}_1 + L_2\bar{x}_2 + L_3\bar{x}_3\right] = \frac{d}{ds}(L_2) - \left[-k_2L_1 + (\tau+\varphi')L_3\right] ; \boxed{\bar{x}_2\bar{u}'' = \frac{dL_2}{ds} + k_2L_1 - (\tau+\varphi')L_3}$$

$$\bar{x}_3 \cdot \bar{u}'' = \frac{d}{ds}(\bar{x}_3 \cdot \bar{u}') - \bar{x}'_3\bar{u}' = \frac{d}{ds}\left[\bar{x}_3(L_1\bar{x}_1 + L_2\bar{x}_2 + L_3\bar{x}_3)\right] - \left[-k_3\bar{x}_1 - (\tau+\varphi')\bar{x}_2\right] \cdot$$

$$\cdot\left[L_1\bar{x}_1 + L_2\bar{x}_2 + L_3\bar{x}_3\right] = \frac{d}{ds}(L_3) - \left[-k_3L_1 - (\tau+\varphi')L_2\right] ; \boxed{\bar{x}_3\bar{u}'' = \frac{dL_3}{ds} + k_3L_1 + (\tau+\varphi')L_2}$$

$$k\bar{b}\bar{u}' = k(\operatorname{sen}\varphi\,\bar{x}_2 + \cos\varphi\,\bar{x}_3)(L_1\bar{x}_1 + L_2\bar{x}_2 + L_3\bar{x}_3) = k\operatorname{sen}\varphi\, L_2 + k\cos\varphi\, L_3$$

$$\boxed{k\bar{b}\bar{u}' = -k_3L_2 + k_2L_3}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{bu''}}{k}\right)=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{ds}(\overline{bu'})-\frac{\overline{b'}}{k}\,\overline{u'}\right]=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{ds}(\overline{bu'})+\frac{\tau}{k}\,\overline{n}\,\overline{u'}\right]=$$

$$=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{ds}\left\{\left[\operatorname{sen}\varphi\,\overline{x}_2+\cos\varphi\,\overline{x}_3\right]\cdot\left[L_1\overline{x}_1+L_2\overline{x}_2+L_3\overline{x}_3\right]\right\}+\frac{\tau}{k}\left[\cos\varphi\,\overline{x}_2-\operatorname{sen}\varphi\,\overline{x}_3\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[L_1\overline{x}_1+L_2\overline{x}_2+L_3\overline{x}_3\right]\right]=\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{ds}\left[\operatorname{sen}\varphi L_2+\cos\varphi L_3\right]+\frac{\tau}{k}\left[\cos\varphi L_2-\operatorname{sen}\varphi L_3\right]\right]=$$

$$=\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{ds}\left[\frac{-k_3L_2+k_2L_3}{k}\right]+\frac{\tau}{k^2}(k_2L_2+k_3L_3)\right\}$$

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{bu''}}{k}\right)=\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{ds}\left[\frac{-k_3L_2+k_2L_3}{k}\right]+\frac{\tau}{k^2}(k_2L_2+k_3L_3)\right\}}$$

Teniendo en cuenta esas últimas expresiones, queda:

$$K_2=k_2\left[1-2\overline{x}_1\cdot(L_1\overline{x}_1+L_2\overline{x}_2+L_3\overline{x}_3)\right]+\alpha k_3+\overline{x}_2\cdot\overline{u''}\;;\quad\text{es decir:}$$

$$\boxed{K_2=k_2(1-2L_1)+\alpha k_3+\frac{dL_2}{ds}+k_2L_1-(\tau+\varphi')L_3}$$

$$K_3=k_3\left[1-2\overline{x}_1\cdot(L_1\overline{x}_1+L_2\overline{x}_2+L_3\overline{x}_3)\right]-\alpha k_2+\overline{x}_3\overline{u''}\;;\quad\text{o sea :}$$

$$\boxed{K_3=k_3(1-2L_1)-\alpha k_2+\frac{dL_3}{ds}+k_3L_1+(\tau+\varphi')L_2}$$

$$\boxed{\mathcal{T}=\tau(1-L_1)+\alpha'+k_2L_3-k_3L_2+\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{-k_3L_2+k_2L_3}{k}\right)+\frac{\tau}{k^2}(k_2L_2+k_3L_3)\right]}$$

La deformación unitaria de la directriz es:

$$\varepsilon_1=\frac{dS-ds}{ds}=\frac{dS}{ds}-1=\frac{1}{1-\overline{t}.\overline{u}'}-1=1+\overline{t}.\overline{u}'-1=\overline{t}.\overline{u}'=\overline{x}_1.(L_1\overline{x}_1+L_2\overline{x}_2+L_3\overline{x}_3)=L_1$$

$$\boxed{\varepsilon_1=\frac{dS-ds}{ds}=L_1}$$

1.3 Ecuaciones de equilibrio

Hipótesis: Para que se cumplan las condiciones de linealidad, - dichas ecuaciones se plántean en la curva $\overline{r}=\overline{r}(s)$

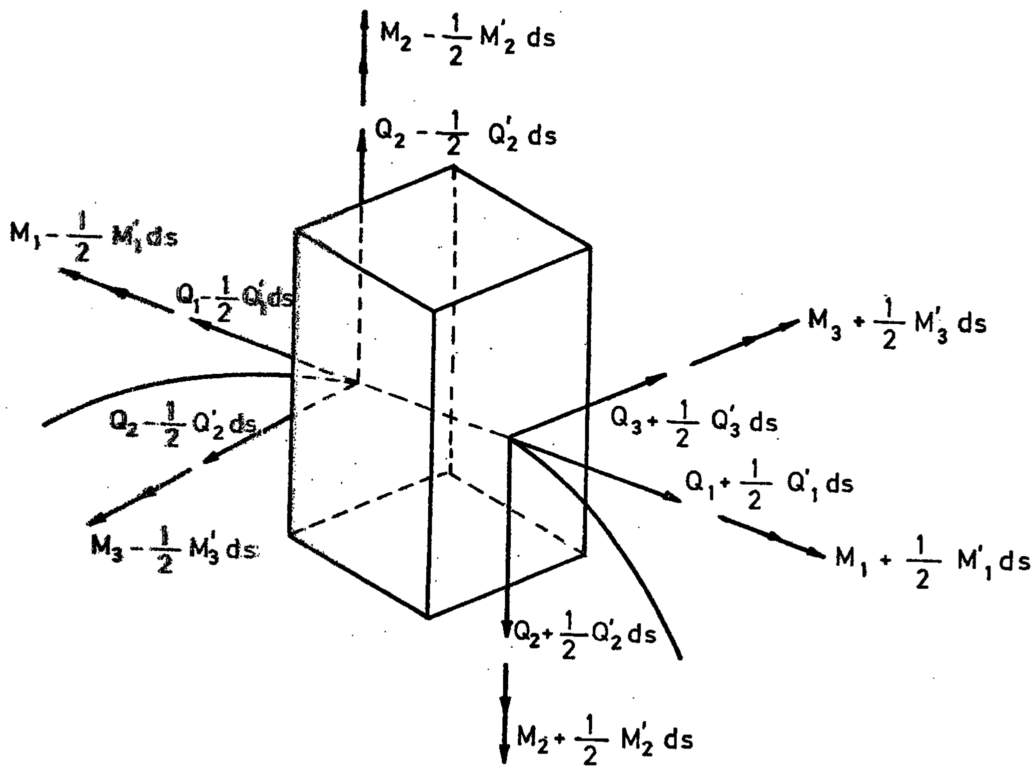


FIG. 7

Esfuerzos: $\overline{M}= M_1\overline{x}_1+M_2\overline{x}_2+M_3\overline{x}_3$; $\overline{Q}= Q_1\overline{x}_1+Q_2\overline{x}_2+Q_3\overline{x}_3$

Acciones por unidad de longitud:

$\overline{F}=F_1\overline{x}_1+F_2\overline{x}_2+F_3\overline{x}_3$ (fuerzas); $\overline{G}=G_1\overline{x}_1+G_2\overline{x}_2+G_3\overline{x}_3$ (momentos)

En este caso, el cortante que da momentos es $\overline{Q}\times\overline{t}$ (FIG. 8), pues es el contenido en el plano de la sección. - Por tanto, las ecuaciones de equilibrio — bien conocidas $\frac{dQ}{ds}+q=0$ y $\frac{dM}{ds}+Q=0$, quedan en la forma:

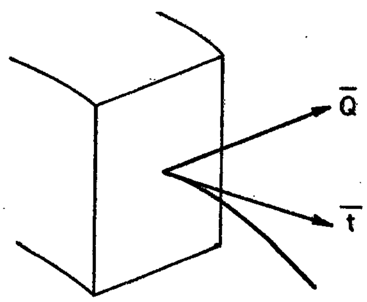


FIG. 8

$$\overline{F}+\frac{d\overline{Q}}{ds}=0 \quad y \quad d\overline{M}+(\overline{t}\times\overline{Q})ds+\overline{G}\,ds=\overline{0}$$

que equivalen a:

$$\overline{F}+\frac{d\overline{Q}}{ds}=\overline{0} \qquad y \qquad \overline{G}+\frac{d\overline{M}}{ds}+\overline{t}\times\overline{Q}=\overline{0}$$

Las dos fórmulas anteriores, desarrolladas, se convierte en:

$$Q'_1 - k_2Q_2 - k_3Q_3 + F_1 = 0 \quad ; \quad M'_1 - k_2M_2 - k_3M_3 + G_1 = 0$$

$$Q'_2 + k_2Q_1 - (\tau + \varphi')Q_3 + F_2 = 0 \quad ; \quad M'_2 + k_2M_1 - (\tau + \varphi')M_3 - Q_3 + G_2 = 0$$

$$Q'_3 + k_3Q_1 + (\tau + \varphi')Q_2 + F_3 = 0 \quad ; \quad M'_3 + k_3M_1 + (\tau + \varphi')M_2 + Q_2 + G_3 = 0$$

1.3 Relación esfuerzo-deformaciones

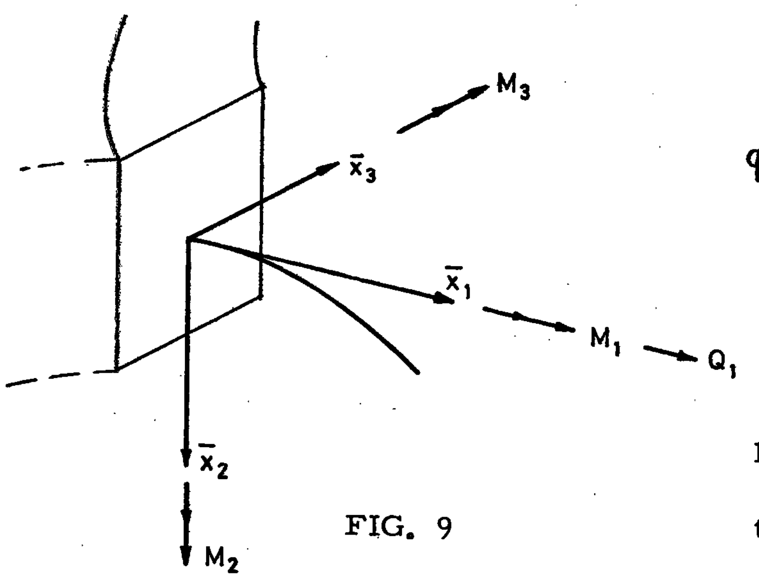


FIG. 9

Es preciso recordar las relaciones $\frac{1}{\rho} = k \simeq y'' = \frac{M}{EI}$ y $\varphi = \frac{Mt}{GJ}$, siendo φ el ángulo específico de torsión (ángulo girado por unidad de longitud).

Como τ es la variación de la binormal por unidad de longitud, se verifica:

$$M_1 = GJ\,(\mathcal{T} - \tau)$$
$$M_2 = -EI_2(K_3 - k_3)$$
$$M_3 = EI_3(K_2 - k_2)$$
$$Q_1 = E\Omega\,\varepsilon_1$$

Los signos de las fórmulas anteriores se explican como sigue: La curvatura según $\bar{x}_3$ (línea de trazo continuo en la FIG. 9) proporciona M_2 negativo. Por otra parte, la curvatura según $\bar{x}_2$ (línea de trazo discontinuo) es debida a un M_3 positivo.

En las expresiones anteriores, GJ, EI_2, EI_3 y Ω son, respectivamente, rigidez a torsión, rigidez a flexión en las dos direcciones principales y área de la sección transversal.

1.4 Aplicación a la directriz circular de sección constante.

1ª Hipótesis.

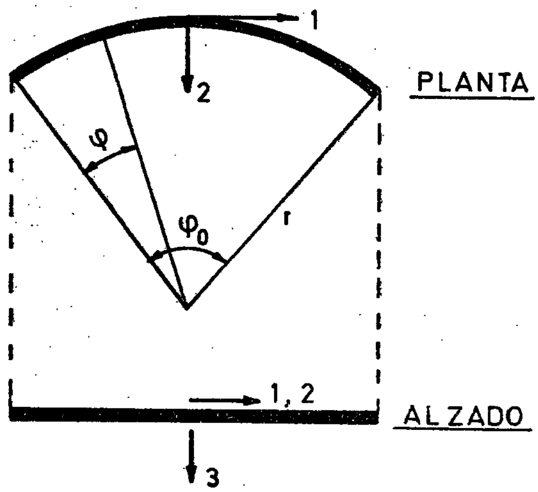


FIG. 10

$\varphi = 0$: Se refiere al ángulo $\widehat{\bar{n} \text{ o } \bar{x}_2}$. Esto implica que los ejes principales de inercia coinciden con el triedro intrínseco.

$k_2 = \frac{1}{r}$ = constante.

$k_3 = 0$

$\tau = 0$

De aquí se deduce:

$$L_1 = u'_1 - \frac{u_2}{r}$$

$$L_2 = u'_2 + \frac{u_1}{r}$$

$$L_3 = u'_3$$

2ª Hipótesis.

Se supone que la pieza es inextensible ; es decir: $\varepsilon_1 = L_1 = 0$,
Por lo tanto, se cumple :

$$K_2 = \frac{1}{r} + u''_2 + \frac{u_2}{r^2} \quad ; \quad K_3 = -\frac{\alpha}{r} + u''_3$$

$$\tau = \alpha' + \frac{u'_3}{r} + \frac{d}{ds}\left[r \frac{d}{ds} u'_3 \right] = \alpha' + \frac{u'_3}{r} + r u'''_3$$

3ª Hipótesis.

$u'''_3 \ll \frac{1}{r^2} u'_3$; o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta que $s = \varphi . r$:

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

$$\frac{d^3u}{ds^3} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^3u}{d\varphi^3} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{d^3u}{d\varphi^3}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{r^3} \cdot \frac{d^3u_3}{d\varphi^3} << \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{r} \; \frac{du_3}{d\varphi} \qquad\qquad \underline{\frac{d^3u_3}{d\varphi^3} << \frac{du_3}{d\varphi}}$$

Las ecuaciones de equilibrio quedan como sigue:

$$-\frac{Q_2}{r} + F_1 = 0 \; ; \qquad M'_1 - \frac{M_2}{r} + G_1 = 0$$

$$Q'_2 + F_2 = 0 \; ; \qquad M'_2 + \frac{M_1}{r} - Q_3 + G_2 = 0$$

$$Q'_3 + F_3 = 0 \; ; \qquad M'_3 + Q_2 + G_3 = 0$$

Se distinguen dos tipos de esfuerzos:

- Tipo arco: correspondiente a la actuación de F_1, F_2 y G_3.
- Tipo viga balcón: correspondiente al resto de las acciones.

En lo que sigue, se estudia únicamente la viga balcón circular, es decir:

$$F_1 = F_2 = G_3 = 0$$

Por lo tanto:

$$Q_2 = 0$$

$$M_3 = \text{cte.}$$

Las ecuaciones de equilibrio se reducen, en este caso, a:

$$Q'_3 + F_3 = 0 \; ; \quad M'_1 - \frac{M_2}{r} + G_1 = 0 \; ; \quad M'_2 + \frac{M_1}{r} - Q_3 + G_2 = 0$$

2. ESTUDIO DE LA VIGA BALCON CIRCULAR

2.1 Ecuaciones generales.

A continuación, se sustituye la notación general que se ha utilizado hasta el momento, por la notación usual en la viga balcón circular:

$$w = u_3 \quad ; \quad m_f = M_2 \quad ; \quad z = F_3$$
$$\theta = \alpha \quad ; \quad m_t = M_1 \quad ; \quad G_t = G_1$$
$$a = r \quad ; \quad q = Q_3 \quad ; \quad G_f = G_2$$

Además, todas las derivadas que aparecen en lo que sigue, lo son respecto a φ.

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$q' + az = 0 \quad ; \quad m'_t - m_f + aG_t = 0 \quad ; \quad m'_f + m_t - aq + aG_f = 0$$

Y las relaciones entre esfuerzos y deformaciones quedan como siguen:

$$m_f = -EI_2\left[-\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2}w'' - 0\right] = -\frac{R_f}{a^2}\left[w'' - a\,\theta\right]$$

$$m_t = GJ\left[\frac{\alpha'}{r} + \frac{w'}{r^2} + \frac{r}{r^3}w'''\right] = \frac{R_t}{a^2}\left[w' + a\,\theta'\right]$$ habida cuenta de la 3ª hipótesis.

Eliminando q, m_f y m_t entre las cinco últimas ecuaciones, y llamando:

$$Z_1 = \frac{az + G'_f}{R_f} \quad ; \quad G_1 = \frac{G_t}{R_t} \quad ; \quad \mu = \frac{R_f}{R_t}$$

se obtiene:

$$(1) \quad q' + az = 0 \quad ; \quad m'_t = \frac{R_t}{a^2}\left[w'' + a\,\theta''\right]$$

$$(2) \quad m'_t - m_f + aG_t = 0 \quad ; \quad m'_f = -\frac{R_f}{a^2}\left[w''' - a\,\theta'\right]$$

$$(3) \quad m''_f + m'_t - aq' + aG'_f = 0 \quad ; \quad m''_f = -\frac{R_f}{a^2}\left[w^{IV} - a\,\theta''\right]$$

De (2) se deduce :

$$\frac{R_t}{a^2}\left[w''+a\theta''\right]+\frac{R_f}{a^2}\left[w''-a\theta\right]+aG_t=0 \; ; \quad w''+a\theta''+\frac{R_f}{R_t}\left[w''-a\theta\right]+a^3\frac{G_t}{R_t}=0;$$

Es decir: $(1+\frac{R_f}{R_t})\,w''+a\theta''-a\frac{R_f}{R_t}\theta+a^3\frac{G_t}{R_t}=0$.

De (1) y (3) resulta:

$$\frac{-R_f}{a^2}\left[w^{IV}-a\theta''\right]+\frac{R_t}{a^2}\left[w''+a\theta''\right]+a^2z+aG_f'=0 \; ;$$

$$-w^{IV}+a\theta''+\frac{R_t}{R_f}\left[w''+a\theta''\right]+\frac{a^4z}{R_f}+\frac{a^3G_f'}{R_f}=0 \; ;$$

o sea : $-w^{IV}+\frac{R_t}{R_f}w''+a\theta''\left[1+\frac{R_t}{R_f}\right]+\frac{az+G_f'}{R_f}a^3=0$

En resumen: $\mu =$

$$-w^{IV}+\frac{1}{\mu}w''+a(1+\frac{1}{\mu})\theta''+a^3z_1=0$$

$$(1+\mu)w''+a\theta''-a\mu\theta+a^3G_1=0$$

Y utilizando el operador $D=\frac{d}{d\varphi}$, queda :

$$\boxed{\begin{array}{l} -(D^2-\frac{1}{\mu})\,D^2w+a(1+\frac{1}{\mu})\,D^2\theta+a^3Z_1=0 \\ (1+\mu)D^2w+a(D^2-\mu)\theta+a^3G_1=0 \end{array}}$$

2.2 Vector resultante

Se define como vector resultante $\underline{R}$ como :

$$\underline{R}=\begin{bmatrix} w & \theta & -\frac{w'}{a} & m_f & m_t & q \end{bmatrix}^t$$

2.3 Solución complementaria

Se supone $Z=G_f=G_t=0$, con lo cual $Z_1=G_1=0$, es decir :

$$-(D^2-\frac{1}{\mu})\,D^2\,w+a(1+\frac{1}{\mu})\,D^2\theta=0 \qquad \text{(a)}$$

$$(1+\mu)D^2w+a(D^2-\mu)\,\theta=0 \qquad \text{(b)}$$

Se intruduce una función $S(\varphi)$, tal que :

$$\theta = -(1+\mu)\, D^2 S(\varphi) \quad ; \quad w = a(D^2-\mu)\, S(\varphi)$$

Entrando, con esas condiciones, en la ecuación (b) :

$(1+\mu)D^2\, a\,(D-\mu)\, S - a\left[D^2-\mu\right](1+\mu)D^2 S = 0$, se observa que dicha ecuación se satisface idénticamente.

Si se entra en la ecuación (a) :

$$-(D^2-\frac{1}{\mu})D^2 \cancel{a}\,(D^2-\mu)S - \cancel{a}\,(1+\frac{1}{\mu})D^2(1+\mu)\,D^2 S = 0\,;$$

$$\left[(D^2-\frac{1}{\mu})\,(D^2-\mu)+D^2(1+\frac{1}{\mu})(1+\mu)\right]D^2 S = 0\,;\left[D^4-D^2\mu-\frac{D^2}{\mu}+1+D^2+D^2\mu+\right.$$

$$\left.+\frac{D^2}{\mu}+D^2\right]D^2 S = 0$$

es decir : $\boxed{(D^4+2D^2+1)\,D^2 S = 0}$

En esta ecuación diferencial, 0, i y -i son raices dobles de la ecuación-característica, por tanto :

$$S = (A_1+B_1\varphi)+(A_2+B_2\varphi)(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)+(A_3+B_3\varphi)(\cos\varphi-i\,\mathrm{sen}\,\varphi);$$

$$S = \underbrace{(A_2+A_3)}_{a_1}\cos\varphi+\underbrace{i\,(A_2-A_3)}_{a_2}\mathrm{sen}\varphi+\underbrace{(B_2+B_3)}_{a_3}\varphi\cos\varphi+\underbrace{i\,(B_2-B_3)}_{a_4}\varphi\,\mathrm{sen}\varphi+$$

$$+\underbrace{A_1}_{a_5}+\underbrace{B_1}_{a_6}\varphi$$

La anterior expresión se puede poner en forma matricial como se indica:

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi\\ -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}+\varphi.(1\;\;0)\begin{bmatrix}\cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi\\ -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3\\ a_4\end{bmatrix}+a_5+a_6\varphi$$

y llamando :

$$B^{(o)} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\;;\quad F(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \mathrm{sen}\varphi\\ -\mathrm{sen}\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix};\quad a_{1\,2}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}\quad;\quad a_{3\,4}=\begin{bmatrix}a_3\\ a_4\end{bmatrix}$$

queda:

$$\boxed{S = B^{(o)}\,F(\varphi)\,a_{1\,2}+B^{(o)}\varphi\,F(\varphi)\,a_{3\,4}+a_5+a_6\varphi}$$

Siendo a_i (i = 1, 2, ..., 6) constantes arbitrarias.

Sea
$$S^{(k)} = \frac{d^k S}{d\varphi^k} = B^{(k)} F(\varphi)\, a_{1\,2} + B^{(k)}\varphi\, F(\varphi)\, a_{3\,4} + C^{(k)} F(\varphi)\, a_{3\,4}$$

con k = 2, 3, ..., etc.

y donde $B^{(k)}$ y $C^{(k)}$ son unas ciertas matrices, variables según el valor de k, esto es, según el grado de derivación, y con una estructura análoga a - la de $B^{(o)}$.

Derivando un vez más $S^{(k)}$ se tiene:

$$S^{(k+1)} = B^{(k)} F'(\varphi) a_{1\,2} + B^{(k)}\varphi\, F'(\varphi) a_{3\,4} + B^{(k)} F(\varphi) a_{3\,4} + C^{(k)} F'(\varphi) a_{3\,4}$$

Pero:

$$F'(\varphi) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = t.\, F(\varphi)\ ;\ \text{con}\ \ t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se puede poner :

$$S^{(k-1)} = B^{(k)} t\, F(\varphi) a_{1\,2} + B^{(k)} t\, \varphi\, F(\varphi) a_{3\,4} + \left[B^{(k)} + C^{(k)}.\, t\right] F(\varphi)\, a_{3\,4} =$$

$$= B^{(k+1)} F(\varphi) a_{1\,2} + B^{(k+1)} \varphi\, F(\varphi) a_{3\,4} + C^{(k+1)} F(\varphi) a_{3\,4}$$

O sea :

$$B^{(k+1)} = B^{(k)}.\, t \qquad \text{y} \qquad C^{(k+1)} = B^{(k)} + C^{(k)}.\, t$$

Ahora bien, por otra parte se cumple :

$$\left.\begin{aligned}
t^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \operatorname{sen}(\pi/2) \\ -\operatorname{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} \\
t^2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos(2\pi/2) & \operatorname{sen}(2\pi/2) \\ -\operatorname{sen}(2\pi/2) & \cos(2\pi/2) \end{bmatrix} \\
t^3 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos(3\pi/2) & \operatorname{sen}(3\pi/2) \\ -\operatorname{sen}(3\pi/2) & \cos(3\pi/2) \end{bmatrix} \\
&\text{-----------------------------etc...}
\end{aligned}\right\}\ \text{es decir}\quad t^k = \begin{bmatrix} \cos(k\pi/2) & \operatorname{sen}(k\pi/2) \\ -\operatorname{sen}(k\pi/2) & \cos(k\pi/2) \end{bmatrix}$$

Y además:

$$\left.\begin{array}{l} B^{(k)} = B^{(k-1)} . t \\ B^{(k-1)} = B^{(k-2)} . t \\ \text{-----------------} \\ B^{(3)} = B^{(2)} . t \\ B^{(2)} = B^{(1)} . t \\ B^{(1)} = B^{(0)} . t \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} B^{(1)} = B^{(0)} . t \\ B^{(2)} = B^{(0)} . t^2 \\ B^{(3)} = B^{(0)} . t^3 \\ \text{---------------} \\ B^{(k)} = B^{(0)} . t^k \end{array}$$

Por lo tanto:

$$B^{(k)} = B^{(0)} . t^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k\pi/2) & \operatorname{sen}(k\pi/2) \\ -\operatorname{sen}(k\pi/2) & \cos(k\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k\pi/2) & \operatorname{sen}(k\pi/2) \end{bmatrix}$$

Y también:

$$\begin{array}{l} C^{(k+1)} = B^{(k)} + C^{(k)} . t \\ C^{(k)} = B^{(k-1)} + C^{(k-1)} . t \\ \text{------------------------} \\ C^{(3)} = B^{(2)} + C^{(2)} . t \\ C^{(2)} = B^{(1)} + C^{(1)} . t \\ C^{(1)} = B^{(0)} + C^{(0)} . t = B^{(0)} \end{array} \qquad \begin{array}{l} C^{(1)} = B^{(0)} \\ C^{(2)} = B^{(1)} + B^{(0)} . t = 2B^{(1)} \\ C^{(3)} = B^{(2)} + 2B^{(1)} . t = 3B^{(2)} \\ \text{---------------------------} \\ C^{(k)} = kB^{(k-1)} . \end{array}$$

o sea:

$$C^{(k)} = k \begin{bmatrix} \cos \frac{(k-1)\pi}{2} & \operatorname{sen} \frac{(k-1)\pi}{2} \end{bmatrix}$$

En resumen:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} \cos \frac{k\pi}{2} , & \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} C^{(k)} = k\cos \frac{(k-1)\pi}{2} , & k\operatorname{sen} \frac{(k-1)\pi}{2} \end{bmatrix}$$

Entonces resulta:

$$\frac{d^k S}{d\varphi^k} = S^{(k)} = B^{(k)} F(\varphi) a_{1\,2} + B^{(k)} \varphi F(\varphi) a_{3\,4} + C^{(k)} F(\varphi) a_{3\,4} =$$

$$= \begin{bmatrix} B^{(k)} & C^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(\varphi) & \varphi F(\varphi) \\ 0 & F(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1\,2} \\ a_{3\,4} \end{bmatrix} + \frac{d^k}{d\varphi^k} (a_5 + \varphi a_6)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ etc...

o bien, de una forma más compacta.

$$\boxed{S^{(k)} = \mathbb{A}^{(k)}\,\Phi(\varphi)\,a_{1234} + \frac{d^k}{d\varphi^k}\,(a_5 + \varphi\, a_6)}$$

2.4 <u>Expresión del vector resultante</u>.

Recordando las condiciones impuestas para la obtención de la solución complementaria: $q=$ cte. Además:

$$q=\frac{1}{a}(m'_f+m_t) = -\frac{R_f}{a^3}\,(D^3w-aD\theta) + \frac{R_f}{a^3}\,(Dw+aD\theta) =$$

$$=-\frac{R_f}{a^3}\left[D^3a(D^2-\mu)\,S+a(1+\mu)\,D^3S\right]+\frac{R_t}{a^3}\left[Da(D^2-\mu)S-a(1+\mu)D^3S\right] =$$

$$=-\frac{R_f}{a^2}\left[D^5S-\mu D^3S+D^3S+\mu D^3S\right]+\frac{R_t}{a^2}\left[D^3S-\mu DS-D^3S-\mu D^3S\right] =$$

$$=-\frac{R_f}{a^2}\,(D^5+D^3)S-\mu\frac{R_t}{a^2}\,(D^3+D)\,S = -\frac{R_f}{a^2}(D^5+2D^3+D)\,S$$

Con ésto, y sustituyendo los valores de w, θ, etc. en el vector resultante, se tiene:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} a(D^2-\mu)\,S \\ -(1+\mu)\,D^2S \\ -(D^3-\mu D)\,S \\ -\frac{R_f}{a^2}\left[D^2w-a\,\theta\right] \\ \frac{R_t}{a^2}\left[Dw+aD\theta\right] \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(D^2-\mu)\,S \\ -(1+\mu)D^2S \\ -(D^3-\mu D)\,S \\ -\frac{R_f}{a^2}\left[D^2a(D^2-\mu)\,S+a(1+\mu)D^2S\right] \\ \frac{R_t}{a^2}\left[Da(D^2-\mu)\,S-aD(1+\mu)\,D^2S\right] \\ q \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} -a\mu S+aS^{(2)} \\ -(1+\mu)\,S^{(2)} \\ \mu S^{(1)}-S^{(3)} \\ -\frac{R_f}{a}\left[S^{(4)}-\mu S^{(2)}+S^{(2)}+\mu S^{(2)}\right] \\ \frac{R_t}{a}\left[S^{(3)}-\mu S^{(1)}-S^{(3)}-\mu S^{(3)}\right] \\ -\frac{R_f}{a^2}\left[S^{(1)}+2S^{(3)}+S^{(5)}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\mu & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{a} & 0 & -\frac{R_f}{a} & 0 \\ 0 & -\frac{R_f}{a} & 0 & -\frac{R_f}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_f}{a^2} & 0 & -\frac{2R_f}{a^2} & 0 & -\frac{R_f}{a^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} S^{(0)} \\ S^{(1)} \\ S^{(2)} \\ S^{(3)} \\ S^{(4)} \\ S^{(5)} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los distintos valores de $S^{(k)}$:

$$\underline{R} = G' \left[\begin{bmatrix} A^{(0)} \\ A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \\ A^{(4)} \\ A^{(5)} \end{bmatrix} \cdot \Phi(\varphi) . a_{1234} + \begin{bmatrix} a_5 + \varphi a_6 \\ a_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

Pero, como q= cte, no puede tener términos en φ, por lo cual:

$$\underline{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a\mu & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_f}{a} & 0 & -\frac{R_f}{a} \\ 0 & -\frac{R_f}{a} & 0 & -\frac{R_f}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G(6 \times 5)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} A^{(0)} \\ A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \\ A^{(4)} \end{bmatrix}}_{A(5x4)} \times \Phi(\varphi) . a_{1234} + G' \begin{bmatrix} a_5 + \varphi a_6 \\ a_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = G . A . \Phi(\varphi) . a_{1234} + \begin{bmatrix} -a\mu a_5 - a\mu\varphi a_6 \\ 0 \\ \mu a_6 \\ 0 \\ -\frac{R_f}{a} a_6 \\ -\frac{R_f}{a^2} a_6 \end{bmatrix} = G . A \Phi(\varphi) . a_{1234} + \underbrace{\begin{bmatrix} -a\mu & -a\mu\varphi \\ 0 & 0 \\ 0 & \mu \\ 0 & 0 \\ 0 & -R_f/a \\ 0 & -R_f/a^2 \end{bmatrix}}_{g(\varphi)\,(6x2)} \times \underbrace{\begin{bmatrix} a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}}_{a_{56}}$$

Es decir

$$\boxed{\underline{R} = G . A \, \Phi(\varphi) . a_{1234} + g(\varphi) . a_{56}}$$

2.5 Matriz de rigidez.

Se definen $\underline{d}$ y $\underline{p}$ como dos submatrices de $\underline{R}$ formadas por las filas (1,2,3) y (6,5,4), respectivamente:

$$\underline{d}(\varphi) = \underline{G}^d . A . \Phi(\varphi) . a_{1234} + \underline{g}^d . a_{56}$$

$$\underline{p}(\varphi) = \underline{G}^p . A . \Phi(\varphi) . a_{1234} + \underline{g}^p . a_{56}$$

en donde $\underline{G}^d$ y $\underline{G}^p$ son las correspondientes submatrices de G, y $\underline{g}^d(\varphi)$ y $\underline{g}^p(\varphi)$ las correspondientes submatrices de $g(\varphi)$

Se definen: $d_0 = \underline{d}(0)$, $d_1 = \underline{d}(\varphi_0)$, $p_0 = \underline{p}(0)$ y $p_1 = \underline{p}(\varphi_0)$.

Entonces : $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{10} \\ k_{01} & k_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \underline{k} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}$

en donde es :

$$d_1 = \underline{G}^d . A . \Phi(\varphi_0) . a_{1234} + \underline{g}^d(\varphi_0) . a_{56}; \quad d_0 = \underline{G}^d . A . \Phi(0) . a_{1234} + \underline{g}^d(0) . a_{56}$$

$$p_1 = \underline{G}^p . A . \Phi(\varphi_0) . a_{1234} + \underline{g}^p(\varphi_0) . a_{56}; \quad p_0 = \underline{G}^p . A . \Phi(0) . a_{1234} + \underline{g}^p(0) . a_{56}$$

o bien, en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}^p . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^p(\varphi_0) \\ \underline{G}^p . A . \Phi(0) & \underline{g}^p(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1234} \\ a_{56} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}^d . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^d(\varphi_0) \\ \underline{G}^d . A . \Phi(0) & \underline{g}^d(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1234} \\ a_{56} \end{bmatrix}$$

Despejando en la última expresión, se obtienen las constantes:

$$\begin{bmatrix} a_{1234} \\ a_{56} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}^d . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^d(\varphi_0) \\ \underline{G}^d . A . \Phi(0) & \underline{g}^d(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo en la anterior, se deduce la matriz de rigidez:

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} \underline{G}^p . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^p(\varphi_0) \\ \underline{G}^p . A . \Phi(0) & \underline{g}^p(0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \underline{G}^d . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^d(\varphi_0) \\ \underline{G}^d . A . \Phi(0) & \underline{g}^d(0) \end{bmatrix}^{-1}$$

2.6 Matriz de transferencia.

De manera análoga :

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} p_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}^p . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^p(\varphi_0) \\ \underline{G}^d . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^d(\varphi_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1234} \\ a_{56} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} p_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}^p . A . \Phi(0) & \underline{g}^p(0) \\ \underline{G}^d . A . \Phi(0) & \underline{g}^d(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1234} \\ a_{56} \end{bmatrix}$$

La matriz de transferencia es :

$$\boxed{T = \begin{bmatrix} \underline{G}^p . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^p(\varphi_0) \\ \underline{G}^d . A . \Phi(\varphi_0) & \underline{g}^d(\varphi_0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{G}^p . A . \Phi(0) & \underline{g}^p(0) \\ \underline{G}^d . A . \Phi(0) & \underline{g}^d(0) \end{bmatrix}^{-1}}$$

2.7 Soluciones particulares.

2.7.1 $Z = \delta(\varphi - \varphi_1) . Z \quad ; \quad G_t = 0 \quad ; \quad G_f = 0$

Por ser $q' + a Z = 0$, se tiene :

$$q' = -a Z = -a \delta(\varphi - \varphi_1) Z \quad ; \quad \text{o sea :} \quad q = -a Z \int \delta(\varphi - \varphi_1) d\varphi = -aH(\varphi_1). Z \ ;$$

es decir : $q^0 = -aH(\varphi_1). Z$, siendo $H(\varphi_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi \leq \varphi_1 \\ 1 & \text{si } \varphi > \varphi_1 \end{cases}$

De las dos condiciones de equilibrio restantes, se infiere :

$$m'_t - m_f = 0 \longrightarrow \quad m_f = m'_t \longrightarrow \quad m'_f = m''_t$$

y $m'_f + m_t - aq = 0$; sustituyendo : $m''_t + m_t + a^2 Z H(\varphi_1) = 0$

Pero: $m_t = \frac{R_t}{a^2}\left[w' + a\theta'\right]$; $m'_t = \frac{R_t}{a^2}\left[w'' + a\theta''\right]$; $m''_t = \frac{R_t}{a^2}\left[w''' + a\theta'''\right]$;

o sea : $\frac{R_t}{a^2}\left[D^3 w + a D^3 \theta\right] + \frac{R_t}{a^2}\left[Dw + a D \theta\right] + a^2 Z H(\varphi_1) = 0$;

$$\frac{R_t}{a^2}(D^3+D)(w+a\theta)+a^2 z H(\varphi_1)=0\ ;\ \frac{R_t}{a^2}(D^3+D)\left[a(D^2-\mu)-a(1+\mu)D^2\right]S+$$

$$+a^2 Z H(\varphi_1)=0\ ;\ \frac{R_t}{a^2}(D^3+D)\left[aD^2-a\mu-aD^2-a\mu D^2\right]S+a^2 Z H(\varphi_1)=0\ ;$$

$$-\mu\frac{R_t}{a}D(D^2+1)(D^2+1)S+a^2 Z\ H(\varphi_1)=0$$

$$D(D^2+1)^2 S=\frac{a^3}{R_f}ZH(\varphi_1)\longrightarrow S^0=\frac{a^3}{R_f}(\varphi-\varphi_1)ZH(\varphi_1)$$ es una solución particular.

De aquí se deduce el vector resultante:

$$w^0=a(D^2-\mu)S^0=-a\mu\frac{a^3(\varphi-\varphi_1)}{R_f}ZH(\varphi_1)=-\frac{a^4(\varphi-\varphi_1)}{R_t}ZH(\varphi_1)$$

$$\theta^0=-(1+\mu)D^2S^0=0$$

$$\frac{-w'^0}{a}=\frac{a^4}{aR_t}ZH(\varphi_1)=\frac{a^3}{R_t}ZH(\varphi_1)$$

$$m_f^0=-\frac{R_t}{a^2}(w'^0-a\theta^0)=0$$

$$m_t^0=\frac{R_t}{a^2}(w'^0+a\theta'^0)=\frac{R_t}{a^2}\left[-\frac{a^4}{R_t}ZH(\varphi_1)\right]=-a^2 ZH(\varphi_1)$$

$$q^0=-aZH(\varphi_1)$$

Es decir:

$$\underline{R}^0=\begin{bmatrix}-\frac{a^4}{R_t}(\varphi-\varphi_1)\\ 0\\ a^3/R_t\\ 0\\ -a^2\\ -a\end{bmatrix}\cdot ZH(\varphi_1)$$

Y, por lo tanto :

$$\underline{d}_0^0=\underline{0}\quad;\quad \underline{d}_1^0=\begin{bmatrix}\frac{a^4}{R_t}(\varphi_0-\varphi_1)\\ 0\\ a^3/R_t\end{bmatrix}\cdot Z\quad;\quad \underline{p}_0^0=\underline{0}\quad;\quad \underline{p}_1^0=\begin{bmatrix}-a\\ -a^2\\ 0\end{bmatrix}\cdot Z$$

2.7.2 $Z=0\ ;\ G_t = G_t\,\delta(\varphi-\varphi_1)\ ;\ G_f=0$

De las ecuaciones de equilibrio, se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} q'=0 \longrightarrow q=\text{cte.} \\ m'_t - m_f = -aG_t\,\delta(\varphi-\varphi_1) \\ m'_f + m_t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{R_t}{a^2}\left[D^2w + aD^2\theta\right] + \mu\frac{R_t}{a^2}\left[D^2w - a\theta\right] = -aG_t\,\delta(\varphi-\varphi_1) \\ -\frac{R_f}{a^2}\left[D^3w - aD\theta\right] + \frac{R_f}{\mu a^2}\left[Dw + aD\theta\right] = 0 \end{array}$$

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} (1+\mu)D^2w + a(D^2-\mu)\theta = -\frac{a^3}{R_t}G_t\,\delta(\varphi-\varphi_1) \\ -(D^2-\frac{1}{\mu})Dw + a(1+\frac{1}{\mu})D\theta = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Sea $S_o(\varphi)$ una función tal que cumpla:

$$w = a(1+\frac{1}{\mu})\,S_o \quad ; \quad \theta = (D^2-\frac{1}{\mu})\,S_o$$

En ese caso, la segunda ecuación de (1) se satisface idénticamente y entrando en la primera:

$$a(1+\mu)(1+\frac{1}{\mu})D^2S_o + a(D^2-\mu)(D^2-\frac{1}{\mu})S_o = -\frac{a^3}{R_t}G_t\,\delta(\varphi-\varphi_1)$$

$$a\left[D^2 + \frac{D^2}{\mu} + \mu D^2 + D^2 + D^4 - \frac{D^2}{\mu} - \mu D^2 + 1\right]S_o = -\frac{a^3}{R_t}G_t\,\delta(\varphi-\varphi_1)$$

$$\boxed{(D^4+2D^2+1)\,S_o = -\frac{a^2}{R_t}G_t\,\delta(\varphi-\varphi_1)} \qquad (2)$$

Suponiendo:

$$S_o^{(k)}(\varphi) = A^{(k)}\,\Phi(\varphi)\,a^o_{1234} \qquad \text{si} \quad \varphi \leq \varphi_1$$

$$S_o^{(k)}(\varphi) = A^{(k)}\,\Phi(\varphi)\,a^o_{1234} \qquad \text{si} \quad \varphi \geq \varphi_1$$

Y estableciendo las condiciones que físicamente corresponden a continuidad de flechas, giros y curvaturas:

$$A^{(0)}\,\Phi(\varphi_1)\,a^o_{1234} - A^{(0)}\,\Phi(\varphi_1)\,b^o_{1234} = 0$$

$$A^{(1)}\,\Phi(\varphi_1)\,a^o_{1234} - A^{(0)}\,\Phi(\varphi_1)\,b^o_{1234} = 0$$

$$A^{(2)}\,\Phi(\varphi_1)\,a^o_{1234} - A^{(0)}\,\Phi(\varphi_1)\,b^o_{1234} = 0$$

Integrando en (2) se cumple :

$$\left[D^3S_o\right]_{\varphi_1-\epsilon}^{\varphi_1+\epsilon} + 2\underset{\overset{\|}{0}}{\left[DS_o\right]_{\varphi_1-\epsilon}^{\varphi_1+\epsilon}} + \underset{\overset{\|}{0}}{\int_{\varphi_1-\epsilon}^{\varphi_1+\epsilon} S_o\, d\varphi} = -\frac{a^2}{R_t}\int_{\varphi_1-\epsilon}^{\varphi_1+\epsilon} G_t\, \delta(\varphi-\varphi_1)\, d\varphi = -\frac{a^2}{R_t}G_t$$

$$A^{(3)}\Phi(\varphi_1)\, b^o_{1234} - A^{(3)}\Phi(\varphi_1)\, a^o_{1234} = -\frac{a^2}{R_t}G_t \quad ; \text{ o sea :}$$

$$A^{(3)}\Phi(\varphi_1)\, a^o_{1234} - A^{(3)}\Phi(\varphi_1)\, b^o_{1234} = \frac{a^2}{R_t}G_t$$

Y estableciendo, entre las posibles condiciones de contorno a imponer, que:

$$a^o_{12} = \underline{0} \qquad \text{y} \qquad b^o_{34} = \underline{0} \quad \text{, resulta:}$$

$$\begin{bmatrix} B^{(0)}\varphi_1 F(\varphi_1) & -B^{(0)} F(\varphi_1) \\ B^{(1)}\varphi_1 F(\varphi_1) + C^{(1)} F(\varphi_1) & -B^{(1)} F(\varphi_1) \\ B^{(2)}\varphi_1 F(\varphi_1) + C^{(2)} F(\varphi_1) & -B^{(2)} F(\varphi_1) \\ B^{(3)}\varphi_1 F(\varphi_1) + C^{(3)} F(\varphi_1) & -B^{(3)} F(\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^o_{34} \\ b^o_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a^2/R_t \end{bmatrix} \cdot G_t$$

O lo que es igual:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^o_{34} \\ a^o_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{A} \end{bmatrix} \quad ; \text{ siendo } \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ a^2/R_t \end{bmatrix} \cdot G_t$$

Resulta pues:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}a^o_{34} + A_{12}b^o_{12} &= \underline{0} \\ A_{21}a^o_{34} + A_{22}b^o_{12} &= \underline{A} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} a^o_{34} + A^{-1}_{11}A_{12}b^o_{12} &= 0 \\ a^o_{34} + A^{-1}_{21}A_{22}b^o_{12} &= A^{-1}_{21}\underline{A} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow b^o_{12} = \left[A^{-1}_{21}A_{22} - A^{-1}_{11}A_{12}\right]^{-1} A^{-1}_{2}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} A^{-1}_{12}A_{11}a^o_{34} + b^o_{12} &= \underline{0} \\ A^{-1}_{22}A_{21}a^o_{34} + b^o_{12} &= A^{-1}_{22}\underline{A} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a^o_{34} = \left[A^{-1}_{22}A_{21} - A^{-1}_{12}A_{11}\right]^{-1} A^{-1}_{22}\underline{A}$$

$$\text{y : } a^o_{12} = \underline{0} \qquad ; \qquad b^o_{34} = 0$$

Para obtener el vector resultante, por ejemplo para $\varphi \leq \varphi_1$:

$$w = a\left(1+\frac{1}{\mu}\right)S_o = a\left(1+\frac{1}{\mu}\right)A^{(o)}\Phi(\varphi)\, a^o_{1234}$$

$$\theta = \left(D^2 - \frac{1}{\mu}\right)S_o = -\frac{1}{\mu}A^{(o)}\Phi(\varphi)\, a^o_{1234} + A^{(2)}\Phi(\varphi)\, a^o_{1234}$$

$$= \frac{w'}{a} = -(1+\frac{1}{\mu}) S_o^{(1)} = -(1+\frac{1}{\mu}) A^{(1)} \Phi(\varphi) a_{1234}^{o}$$

$$m_f = -\frac{R_f}{a^2}\left[D^2 w - a\theta\right] = -\frac{R_f}{a^2}\left[(a + \frac{a}{\mu} - a) S_o^{(2)} + \frac{a}{\mu} S_o^{(0)}\right] = -\frac{R_t}{a} A^{(0)} \Phi(\varphi) a_{1234}^{o} -$$

$$- \frac{R_t}{a} A^{(2)} \Phi(\varphi) a_{1234}^{o}$$

$$m_t = \frac{R_t}{a^2}\left[Dw + aD\theta\right] = \frac{R_t}{a^2}\left[(a + \frac{a}{\mu} - \frac{a}{\mu}) S_o^{(1)} + a S_o^{(3)}\right] = \frac{R_t}{a} A^{(1)} \Phi(\varphi) a_{1234}^{o} +$$

$$+ \frac{R_t}{a} A^{(3)} \Phi(\varphi) a_{1234}^{o}$$

q = cte = 0 (en particular) ; por lo tanto, llamando:

$$G_o = \begin{bmatrix} a(1+\frac{1}{\mu}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+\frac{1}{\mu}) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_t}{a} & 0 & -\frac{R_t}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_t}{a} & 0 & \frac{R_t}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta el siguiente vector resultante:

$\underline{R}^o = G_o . A . \Phi(\varphi) a_{1234}^{o}$, $(\varphi \leq \varphi_1)$; $\qquad R^o = G_o . A . \Phi(\varphi) b_{1234}^{o}$, $(\varphi \geq \varphi_1)$

De aquí se deducen d_o^o , d_1^o , p_o^o y p_1^o

2.7.3 $Z = 0$; $G_t = 0$; $G_f = G_f . \delta(\varphi - \varphi_1)$

De las ecuaciones de equilibrio : $q = 0$,

y además:

$m_t' - m_f = 0 \qquad : \frac{R_t}{a^2} D^2\left[w + a\theta\right] + \mu \frac{R_t}{a^2}\left[D^2 w - a\theta\right] = 0$;

$m_f' + m_t = -aG_f \delta(\varphi - \varphi_1) \quad : \frac{R_f}{a^2}\left[D^3 w - aD\theta\right] + \frac{R_f}{\mu a^2}\left[Dw + aD\theta\right] + aG_f \delta(\varphi - \varphi_1) = 0$;

o lo que es igual:

$$(1+\mu)D^2w + a(D^2-\mu)\theta = 0$$

$$-(D^2-\frac{1}{\mu})Dw + a(1+\frac{1}{\mu})D\theta + \frac{a^3}{R_f}G_f\delta(\varphi-\varphi_1) = 0$$

Introduciendo la función S_o definida en 2.3 , la primera de las ecuaciones anteriores se satisface idénticamente. Entrando en la segunda :

$$-a(D^2-\frac{1}{\mu})(D^2-\mu)DS_o - a(1+\mu)(1+\frac{1}{\mu})D^3S_o + \frac{a^3}{R_f}G_f\delta(\varphi-\varphi_1) = 0 \quad ;$$

$$(D^4-\mu D^2-\frac{D^2}{\mu}+1+D^2+\mu D^2+\frac{D^2}{\mu}+D^2)DS_o = \frac{a^2}{R_f}G_f\delta(\varphi-\varphi_1)$$

$$\boxed{\left[D^4+2D^2+1\right]DS_o = \frac{a^2}{R_f}G_f\delta(\varphi-\varphi_1)}$$

Se toma ahora:

$$S_o^{(k)} = A^{(k)}\Phi(\varphi)a^o_{1234} + (a^o_5 + a^o_6\varphi)^{(k)} \quad \text{para} \quad \varphi \leq \varphi_1$$

$$S_o^{(k)} = A^{(k)}\Phi(\varphi)b^o_{1234} + (b^o_5 + b^o_6\varphi)^{(k)} \quad \text{para} \quad \varphi \geqslant \varphi_1$$

Las condiciones a imponer son:

$S_o^{(k)}(\varphi_1)$ continua para k= 0, 1, 2, 3, .

$S_o^{(4)}(\varphi_1)$ discontinua, con salto $\frac{a^2}{R_f}G_f$.

Además : $a^o_{12} = 0$; $b^o_{34} = 0$; $a^o_5 = 0$; $b^o_5 = 0$; $b^o_6 = 0$

En este supuesto, resulta:

$$\begin{bmatrix} B^{(0)}\varphi_1 F(\varphi_1) & -B^{(0)}F(\varphi_1) & \varphi_1 \\ B^{(1)}\varphi_1 F(\varphi_1)+C^{(1)}F(\varphi_1) & -B^{(1)}F(\varphi_1) & 1 \\ B^{(2)}\varphi_1 F(\varphi_1)+C^{(2)}F(\varphi_1) & -B^{(2)}F(\varphi_1) & 0 \\ B^{(3)}\varphi_1 F(\varphi_1)+C^{(3)}F(\varphi_1) & -B^{(3)}F(\varphi_1) & 0 \\ B^{(4)}\varphi_1 F(\varphi_1)+C^{(4)}F(\varphi_1) & -B^{(4)}F(\varphi_1) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^o_{34} \\ b^o_{12} \\ a^o_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{a^2}{R_f}G_f \end{bmatrix}$$

De donde se obtienen a^o_{34}, b^o_{12} y a^o_6.

El vector resultante es:

$$\underline{R}^o = G_o . A . \Phi(\varphi) . a^o_{1234} + g_o(\varphi) . a^o_{56} \ , \quad (\varphi \leq \varphi_1)$$
$$\underline{R}^o = G_o . A . \Phi(\varphi) . b^o_{1234} + g_o(\varphi) . b^o_{56} \ , \quad (\varphi \geq \varphi_1)$$

Siendo G_o y g_o las matrices definidas en 2.3 como G y $g(\varphi)$ respectivamente.

2. 7. 4 Carga uniforme : $Z=Z$; $G_t=0$; $G_f=0$

De las ecuaciones de equilibrio:

$q' + az = 0$; $\frac{dq}{d\varphi} + az = 0$; $dq = -az\, d\varphi$; $\boxed{q^o = -a(\varphi - \frac{\varphi_o}{2})z}$ implicitamente, en esta condición ya se tiene en cuenta que en el punto medio del arco el cortante es nulo, por simetría (FIG. 10).

Además:

$$m_t' - m_f = 0 \longrightarrow (1+\mu)D^2 w + a(D^2 - \mu)\theta = 0$$
$$m_f' + m_t = aq \longrightarrow -(D^2 - \frac{1}{\mu})Dw + a(1+\frac{1}{\mu})D\theta = aq$$

Y utilizando S_o definida en 2.3, resulta:

$$\boxed{\left[D^4 + 2D^2 + 1\right] D S_o = \frac{a^3}{2R_f}(\varphi - \frac{\varphi_o}{2}) Z} \ ; \text{ luego : } S_o(\varphi) = \frac{a^3}{2R_f}(\varphi - \frac{\varphi_o}{2})^2 Z$$

Por lo tanto:

$$w^o = a(D^2 - \mu) S_o = \frac{a^4}{2R_f} . 2Z - \frac{\mu a^4}{2R_f}(\varphi - \frac{\varphi_o}{2})^2 Z = \frac{a^4}{R_f} Z - \frac{a^4}{2R_f}\mu(\varphi - \frac{\varphi_o}{2})^2 Z$$

$$\theta^o = -(1+\mu)D^2 S_o = -(1+\mu)\frac{a^3}{2R_f} 2Z = -(1+\mu)\frac{a^3}{R_f} . Z$$

$$-\frac{w'^o}{a} = -(D^3 - \mu D) S_o = \mu \frac{a^3}{2R_f} . 2(\varphi - \frac{\varphi_o}{2}) Z = \mu \frac{a^3}{R_f}(\varphi - \frac{\varphi_o}{2}) Z$$

$$m_f^o = -\frac{R_f}{a^2}(w''^o - a\theta^o) = -\frac{R_t}{a^2}\left[-\mu \frac{a^4}{R_f} Z + (1+\mu)\frac{a^4}{R_f} Z\right] = -\frac{R_f}{a^2} . \frac{a^4}{R_f} Z = -a^2 Z$$

$$m_t^o = \frac{R_t}{a^2}(w'^o + a\theta'^o) = \frac{R_t}{a^2}\left[-\mu \frac{a^4}{R_f}(\varphi - \frac{\varphi_o}{2}) Z + 0\right] = -a^2(\varphi - \frac{\varphi_o}{2}) Z$$

El vector resultante es:

$$\underline{R}^o = \begin{bmatrix} a^4 - \frac{a^4}{2}\mu(\varphi - \frac{\varphi_0}{2})^2 \\ -(1+\mu)a^3 \\ a^3(\varphi - \frac{\varphi_0}{2}) \\ -a^2 R_f \\ -a^2 R_f(\varphi - \frac{\varphi_0}{2}) \\ -a R_f(\varphi - \frac{\varphi_0}{2}) \end{bmatrix} \cdot \frac{Z}{R_f}$$

2.7.5 Par torsor uniforme : $z = 0$; $G_t = G_t$; $G_f = 0$

De las ecuaciones de equilibrio :

$$\left.\begin{array}{l} q' = 0 \longrightarrow q = 0 \\ m'_t - m_f = -a G_t \\ m'_f + m_t = 0 \end{array}\right\}$$

Considerando S_o definida en 2.7.2:

$$\left[D^4 + 2D^2 + 1\right] S_o = -\frac{a^2}{R_t} \cdot G_t$$

Por lo que una posible solución es: $S_o = -\frac{a^2}{R_t} \cdot G_t$

En este caso:

$w = a(1 + \frac{1}{\mu}) S_o = -\frac{a^3}{R_t}(1 + \frac{1}{\mu}) G_t$; $\theta = -\frac{1}{\mu} S_o = \frac{a^2}{\mu R_t} \cdot G_t$; $m_f = a G_t$; y los demás son nulos:

$$\underline{R}^o = \begin{bmatrix} -\frac{a^3}{R_t}(1 + \frac{1}{\mu}) \\ \frac{a^2}{\mu R_t} \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot G_t$$

2.7.6 Par flector constante : $Z = 0$; $G_t = 0$; $G_f = G_f$

$$\left.\begin{array}{l} q' = 0 \longrightarrow q = 0 \\ m_t' - m_f = 0 \\ m_f' + m_t = -aG_f \end{array}\right\}$$

Introduciendo S_o definida en 2.3 :

$$\left[D^4 + 2D + 1\right] D S_o = \frac{a^2}{R_f} \cdot G_f \quad ; \quad S_o = \frac{a^2}{R_f} G_f \left(\varphi - \frac{\varphi_o}{2}\right)$$

$$w = -a\mu S_o = -\frac{a^3}{R_f}\mu\, G_f\left(\varphi - \frac{\varphi_o}{2}\right) \quad ; \quad \theta = 0 \quad ; -\frac{w'}{a} = \frac{a^2}{R_f}\mu G_f \quad ; \quad m_t = \frac{R_t}{a^2}\left(-\frac{a^3}{R_f}\mu\right)G_f =$$
$$= -a\,G_f$$

$$\underline{R}^o = \begin{bmatrix} -a^3\mu\left(\varphi - \frac{\varphi_o}{2}\right) \\ 0 \\ a^2\mu \\ 0 \\ -a R_f \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{G_f}{R_f}$$

2.8. Condiciones de contorno homogéneas

Se resuelve, a continuación, cualquiera de los casos anteriores de solución particular $\underline{R}^o$ cumpliendo las condiciones de contorno siguientes:

$$\underline{K}_1 \underline{d} + \underline{K}_2 \underline{p} = 0 \qquad (I)$$

Siendo $\underline{K}_1$ y $\underline{K}_2$ matrices diagonales (dimensión 6x6), tales que $\underline{K}_1 \cdot \underline{K}_2 = \underline{0}$

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_o \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_o \end{bmatrix}$$

$$\underline{d} = \underline{d}^o + \underline{d}^c = \begin{bmatrix} \underline{d}^o(\varphi_o) \\ \underline{d}^o(o) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^d A\, \Phi(\varphi_o) & g^d(\varphi_o) \\ G^d A\, \Phi(o) & g^d(o) \end{bmatrix} \cdot a_{123456}$$

$$\underline{p} = \underline{p}^o + \underline{p}^c = \begin{bmatrix} \underline{p}^o(\varphi_o) \\ \underline{p}^o(o) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^p A\, \Phi(\varphi_o) & g^p(\varphi_o) \\ G^p A\, \Phi(o) & g^p(o) \end{bmatrix} \cdot a_{123456}$$

La condición (I) permite calcular a_{123456} y de ahí $\underline{R}^c$, mediante:

$$\underline{R}^c = G A\, \Phi(\varphi) a_{1234} + g(\varphi) a_{56}$$

La solución final es : $\underline{R} = \underline{R}^{o} + \underline{R}^{c}$

siendo $\underline{R}^{o}$ = solución particular

$\underline{R}^{c}$ = solución complementaria.

2. 9. Otras condiciones de contorno. Entramados .

Se aplican técnicas normales del cálculo matricial de estructuras.

PUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS. CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS.

-Cálculo convencional de estructuras.Problemas.
Avelino Samartín,J.R.González de Cangas,Luis Moreno y Javier Torres.
246 páginas(AE-79.1)

-Cálculo de estructuras elásticas geométricamente no lineales.
Avelino Samartín.
62 páginas.(AE-79.2)

-La viga-columna.
Avelino Samartín.
54 páginas.(AE-79.3)

-Cálculo matricial de estructuras.Problemas.
Avelino Samartín,J.R.González de Cangas,Luis Moreno y Javier Torres.
226 páginas.(AE-80.1)

-Un programa de generación automática de datos para cálculo de emparrilla -- dos planos.(GEDE).
Fernando Martinez y Avelino Samartín.
135 páginas(AE-80.2)

-Teoría elemental de vigas alabeadas.Aplicación a la viga-balcón circular.
Avelino Samartín y J.R.González de Cangas.
36 páginas.(AE-80.3)